

Geometria Analítica com GeoGebra usando a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud no Ensino Médio

Candido dos Santos Silva¹, Miguel Raymundo Flores Santibanez^{1,2}, Delfa Mercedes Huatuco Zuasnábar^{1,2}

¹Licenciatura em Informática a Distância – LIEaD, ²Departamento de Ciência da Computação – DCC Universidade Federal de Roraima (UFRR) - Roraima – RR Brasil

candidossilva@gmail.com, {miguel.santibanez, delfa.zuasnabar}@ufrr.br

Resumo. *Os docentes estão inserindo a utilização da tecnologia para incrementar e dinamizar suas aulas, de modo a prender atenção dos estudantes, possibilitando a interação entre a teoria e a prática em sala de aula. Este trabalho apresenta os resultados obtidos de uma pesquisa qualitativa de trabalho de campo utilizando o software GeoGebra e suas funcionalidades, nas aulas de Geometria Analítica: ponto e reta, tendo como base as atividades propostas para uma turma de ensino médio. Destaca-se o uso da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e o uso do software auxiliando o desenvolvimento do processo educacional proporcionando novos horizontes, apoiando o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes.*

1. Introdução

O ensino da matemática em particular a Geometria Analítica usando ferramentas como software educativo, por exemplo, o GeoGebra está de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (2010) com o intuito de melhorar o processo de ensino aprendizagem trazendo uma maior motivação nos estudantes e tornar as aulas cada vez mais lúdicas, dinâmicas e interativas.

A metodologia usada no desenvolvimento das atividades dos estudantes foi a Teoria dos Campos Conceituais com o objetivo de dar importância ao conteúdo do conhecimento. Esta teoria, afirma “[...] que uma abordagem mais frutífera, para o desenvolvimento cognitivo das crianças, seria promovida pela utilização de uma estrutura que se refere aos conteúdos do conhecimento em si próprio e à análise conceitual do domínio”, Vergnaud; Guershon and Confrey (1994).

Este trabalho apresenta o resultado de uma pesquisa realizada e desenvolvida para o 3º ano do ensino médio realizada numa Escola Estadual, com a participação de uma turma de 25 estudantes. O interesse para o estudo do tema surgiu após a observação, nas aulas de Matemática, de que os estudantes não conseguem fazer a associação entre a teoria e a prática, no que se refere aos conteúdos de Geometria Analítica.

O problema da pesquisa proposto foi: De que forma o software GeoGebra pode ser utilizado como ferramenta pedagógica para apoiar a aprendizagem baseada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud sobre o conteúdo de Geometria Analítica?. Sendo o objetivo de este trabalho analisar a contribuição do GeoGebra no ensino de conceitos da geometria analítica: ponto e reta, tendo como base as atividades propostas.



2. Fundamentação Teórica

Esta sessão abordará os assuntos que dão suporte a esta pesquisa como: Geometria Analítica, GeoGebra e Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

2.1 Geometria Analítica

A Geometria Analítica tem entre suas características a realização de conexões entre a Geometria e a Álgebra, pois, por exemplo, permite compreender as soluções de um sistema linear de duas incógnitas por meio de retas em um plano, ou, então, representar por meio de uma equação uma figura bidimensional ou tridimensional. Assim, o século XVII foi marcado por um grande avanço na Matemática, ao ser esta desligada da simples aplicação às necessidades econômicas e tecnológicas. Segundo Dante (2013):

O estudo da Geometria analítica, por seus elementos primitivos, o ponto e a reta, observando como o recurso de processos algébricos imprime uma precisão nas medidas e nos cálculos não encontrada na Geometria e como, por outro lado, a representação geométrica torna concreta as expressões algébricas na maioria das vezes tão abstratas.

As propriedades geométricas das curvas foram assim “traduzidas” por meio de equações, e os resultados da Álgebra foram interpretados geometricamente. Sendo assim, é sensato concordar com a maioria dos historiadores, que consideram as decisivas contribuições dos matemáticos franceses Descartes e Fermat, no século XVII, como a origem essencial da matéria, pelo menos em seu espírito moderno. Só após estas contribuições do impulso desses dois matemáticos encontramos a Geometria Analítica sob a forma como a conhecemos. De qualquer forma, para que a Geometria Analítica pudesse assumir sua apresentação atual, altamente prática, teve que aguardar o desenvolvimento do simbolismo algébrico.

No estudo de Geometria Analítica: ponto e reta, algumas definições são importantes, como: sistema cartesiano ortogonal, distância entre dois pontos, coordenadas do ponto médio de um segmento de reta, inclinação de uma reta, equação da reta, posições relativas de duas retas no plano (retas paralelas, retas concorrentes, intersecção de duas retas), perpendicularidade de duas retas e área de uma região triangular.

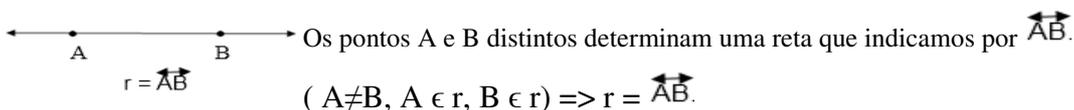
A seguir apresentamos algumas definições da Geometria Analítica segundo Dante (2013):

- Sistema cartesiano ortogonal: são retas orientadas que permitem a localização de pontos no plano ou no espaço.
- Distância entre dois pontos: comprimento do segmento de reta entre dois pontos quais e diferentes.
- Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta: corresponde ao ponto médio de abscissa x e ordenada y de um segmento de reta.
- Inclinação de uma reta: é o ângulo determinado entre o eixo e uma reta qualquer no sentido anti-horário.
- Equação da reta: a partir de um ponto $P(x,y)$ e declividade m , podemos determinar a da mesma.
- Posições relativas de duas retas no plano (retas paralelas, retas concorrentes, intersecção de duas retas): são paralelas quando tem inclinações iguais; concorrentes, quando possui inclinações diferentes, e intersecção, quando possui um ponto em comum, satisfazendo simultaneamente as equações dessas duas retas.



- Perpendicularidade de duas retas: quando a intersecção entre duas retas, determinam um ângulo de 90°.
- Área de uma região triangular: valor numérico atribuído a uma região delimitada por três pontos distintos, contido numa mesma reta dois a dois.

Postulado da determinação da reta: dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles, Dolce and Pompeo (2013).



A expressão duas retas coincidentes é equivalente a uma única reta. Este postulado é de grande importância na Geometria Analítica, pois serve de base para demonstrações mais complexas.

A origem da Geometria Analítica é uma ideia muito simples, introduzida por Descartes no século XVII, mas extremamente original. É a criação de um sistema de coordenadas que identifica um ponto (P) do plano com um par de números reais (x; y). Partindo-se disso, podemos caracterizá-la como:

- a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra;
- b) o estudo dos pares ordenados de números (x; y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria). Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006).

Percebe-se que o trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Assim, para que essa articulação seja significativa para o estudante, o professor deve trabalhar o entendimento de figuras geométricas, através de equações, e o entendimento de equações, através de figuras geométricas.

A Tabela 1 apresenta um resumo do conteúdo e habilidade descrito por Dante (2013), as quais os estudantes deverão adquirir durante este processo.

Tabela 1 - Conteúdo e habilidade baseada em objetos de conhecimento

Conteúdo	Objetos de conhecimento (Associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	Habilidade
Geometria analítica: ponto e reta		
Sistema cartesiano ortogonal	Conhecimentos algébricos/geométricos - plano cartesiano, retas	<ul style="list-style-type: none">• Identificar características de figuras planas ou espaciais.• Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.• Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
Distância entre dois pontos		
Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta		
Inclinação de uma reta		
Equação da reta		
Posições relativas de duas retas no plano (retas paralelas, retas concorrentes, intersecção de duas retas)	Conhecimentos algébricos/geométrico - par e perpendicularidade	<ul style="list-style-type: none">• Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.• Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
Perpendicularidade de duas retas		
Área de uma região triangular		



Na literatura encontramos diversos softwares para o ensino de Geometria Analítica disponíveis, podemos citar: Cabri Geometry, Dr Geo, Euklid, Geoplan, Régua e Compasso, Graphamática, S-logo e GeoGebra.

2.2 GeoGebra

Na realização desta pesquisa foi escolhido o GeoGebra por ser um software livre, gratuito, escrito na linguagem Java compatível com diferentes sistemas operacionais, leve, fácil de instalar e de manusear voltado para a aprendizagem e o ensino em todos os níveis, possibilitando que se trabalhe geometria interativa, álgebra, tabelas, gráficos, cálculo e estatística, GeoGebra (2017).

Uma das vantagens de se utilizar o software GeoGebra como ferramenta pedagógica, deve-se a capacidade da mesma proporcionar dupla correspondência dos objetos, ou seja, cada expressão disposta na janela algébrica corresponde a um objeto na janela gráfica e vice-versa. Com isso o estudante dispõe da possibilidade de visualizar os cálculos que estão sendo realizados, facilitando a compreensão do conteúdo trabalhado, Hohenwarter (2015).

É através da utilização do software Geogebra durante as aulas, que os estudantes irão adquirir uma nova visão da Geometria Analítica de forma diferenciada, adquirindo as habilidades e competências descritas na tabela 1 por meio da interação, que o software possibilita.

2.3 Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud

A Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud, é uma teoria cognitivista neopiagetiana, do processo de conceitualização do real, que tem por objetivo oferecer uma estrutura e alguns princípios básicos às pesquisas sobre atividades cognitivas, principalmente àquelas que dependem da ciência e da técnica, “[...] mas não é específica da matemática, embora, inicialmente, tenha sido elaborada para explicar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra”, Vergnaud (1993).

Essa teoria, apesar de proporcionar uma estrutura à aprendizagem e envolver a didática, não é uma teoria didática. A principal finalidade é “[...] propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual”, Vergnaud (1993). Um campo conceitual é definido por Vergnaud (1982) como “[...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição”.

De acordo com o autor, três argumentos principais levaram à construção do conceito de campo conceitual, Vergnaud (1983). O primeiro é que um conceito não pode se formar a partir de um único tipo de situação. Como segundo argumento, o autor relata ser necessário mais de um conceito para se analisar uma única situação. E, por último, cita que a construção e a apropriação de todas as propriedades em um conceito são um processo que requer um tempo para entender, podendo gerar analogias e mal-entendidos entre situações, concepções, procedimentos ou significantes.

Segundo Moreira (2002), os interesses dos estudos de Gérard Vergnaud estão voltados para dois principais campos conceituais: o das estruturas aditivas e o das



estruturas multiplicativas. O campo conceitual das estruturas aditivas é o conjunto de situações cujo domínio requer uma adição, uma subtração ou uma combinação de tais operações. O campo conceitual das estruturas multiplicativas consiste em todas as situações que podem ser analisadas como problemas, sejam de proporções simples e múltiplas, no qual é necessária uma multiplicação, divisão ou uma combinação dessas operações.

Apesar da definição de campo conceitual ser bem clara, a linha de fronteira cognitiva entre campos conceituais, não está necessariamente bem definidos. A principal razão para isto é que há uma ruptura no conhecimento humano. Por exemplo, há uma filiação entre as estruturas aditivas e multiplicativas. Apesar disso, há especificidade suficiente nos problemas cognitivos gerados pelas estruturas aditivas de um lado e pelas estruturas multiplicativas de outro, que nos permitem estudar estes dois campos conceituais separadamente, Vergnaud (1988).

Vergnaud (1983, 1988) diz que para estudar e compreender como os conceitos evoluem na mente de um sujeito, por meio de suas experiências, é preciso considerar o conceito (C) como uma terna de conjuntos, ou seja, $C = (S, I, R)$, onde:

- S é o conjunto de situações que dão significado e utilidade ao conceito;
- I é o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito (objetos, propriedades e relações), que podem ser reconhecidas e usadas pelos sujeitos, de forma a analisar e dominar aquelas situações;
- R é o conjunto de significantes, isto é, a representação simbólica, linguística, gráfica ou gestual, que podem ser utilizadas para representar aqueles invariantes, e, desta forma, representar as situações e os procedimentos para lidar com eles.

Em termos psicológicos, o autor explicita que S, o referente, é a realidade; e I e R representam os dois aspectos integrantes do pensamento, o significado (I) e o significante (R).

É fundamental considerar esses três conjuntos simultaneamente – situações, invariantes operatórios e representações simbólicas - ao longo da aprendizagem, para estudar o desenvolvimento e o uso de um conceito, Vergnaud (1983). Um conceito não é uma mera definição, refere-se a um conjunto de situações envolvidas em um conjunto de diferentes invariantes operatórios; e suas propriedades podem ser expressas através de diferentes representações linguísticas e simbólicas, Vergnaud (1998).

3. Metodologia

A abordagem da pesquisa tem natureza quali-quantitativa e é utilizada em sua maior parte, uma vez que apresenta envolvimento de dados estatísticos. De acordo com Goodenough (1971), “uma das características da pesquisa híbrida é a de possibilitar um processo de continuidade e interação, sendo compartilhada por todos a responsabilidade pela execução e pelo sucesso dos resultados”.

Segundo Richardson (1999),

os estudos que empregam uma metodologia qualitativa podem descrever a complexidade de determinado problema, analisar a interação de certas variáveis, compreender e classificar processos dinâmicos vividos por grupos sociais.



A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo, Bogdan and Biklen (1994).

Já a abordagem quantitativa geralmente implica a utilização de questionários e o envolvimento estatístico para a análise dos dados. De acordo com Prodanov and Freitas (2013) “considera que tudo pode ser quantificável, o que significa traduzir em números opiniões e informações para classificá-las e analisá-las”. No desenvolvimento da pesquisa de natureza quantitativa, devemos formular hipóteses e classificar a relação entre as variáveis para garantir a precisão dos resultados, evitando contradições no processo de análise e interpretação, requer o uso de recursos e de técnicas estatísticas (percentagem).

Como a pesquisa trabalha com a utilização de software matemático, a mesma possui aspecto do método dedutivo na modalidade pesquisa de campo, também relacionando atividades propostas. O método dedutivo visa explicar os passos e procedimentos realizados pelos estudantes durante a resolução das atividades propostas, analisando os questionários e deduzindo as informações transcritas nos instrumentos. Para Gil (2008), “parte de princípios reconhecidos como verdadeiros e indiscutíveis e possibilita chegar a conclusões de maneira puramente formal, isto é, em virtude unicamente de sua lógica”.

O universo da pesquisa baseia-se nas turmas do terceiro ano do ensino médio regular da Escola Estadual na qual se optou por uma turma como amostra. As aulas foram divididas em quatro etapas, onde foram definidos os objetivos e metas a serem alcançados. Na aula 1 e 2 foram trabalhados conteúdos de Geometria Analítica: ponto e reta, na qual foram resolvidos problemas e foi mostrado como os mesmos podem ser representados/resolvidos com o auxílio do software GeoGebra. Após essa ambientação com o software, foi apresentada a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Na aula 3, propomos situações problemas para que os estudantes utilizassem o software para resolução das atividades propostas, aplicando a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Finalmente na aula 4 foram aplicados questionários aos estudantes e ao professor colaborador (escola), visando obter informações sobre a aplicabilidade do software, vantagens e desvantagens na sua utilização.

4. Análises dos Resultados

Para a análise dos resultados foi realizada uma tabulação dos dados das atividades propostas aos estudantes de forma quali-quantitativa, na qual o mesmo irá escrever-se as respostas obtidas na manipulação do software GeoGebra. Na aula 4 foram aplicados questionários para os estudantes com o objetivo de verificar a eficácia da metodologia utilizando o software GeoGebra e a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud como ferramentas pedagógicas, instigando sobre o conteúdo, pontos positivos e negativos ao trabalhar com estes.

A seguir apresentamos um exemplo de pergunta do questionário: o GeoGebra ajudou-lhe a ver a matemática sobre outra ótica. A Figura 1 apresenta as respostas representadas por porcentagens nos quesitos “Sim”, “Não” e “Um pouco”.

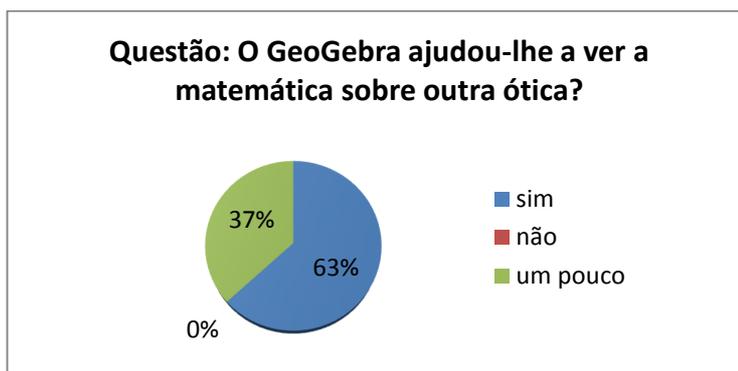


Figura 1. Respostas dos alunos a uma questão do questionário.

A tabela 2 se refere a resposta “sim” e suas respectivas justificativas

Tabela 2 – Resposta “sim” dos alunos e suas justificativas.

Individual	Justificou a resposta
I-01	Usando o computador é completamente diferente
I-02	Porque vejo a matemática melhor
I-07	Pois facilitou a compreensão sobre determinados assuntos
I-08	Muito mais fácil entender o gráfico
I-09	O programa é bom, facilita os cálculos
I-10	Pois facilitou a compreensão da disciplina
I-11	
I-14	Porque é uma maneira mais fácil de resolver as contas
I-15	Antes eu não entendia bem, agora sei
I-17	Uso de algumas ferramentas clareou a minha mente
I-18	Porque facilita a aprender o assunto
I-19	Porque nesse conteúdo não precisamos ficar fazendo tudo a mão

A tabela 3 se refere a resposta “não” e suas respectivas justificativas

Tabela 3 – Resposta “não” dos alunos e suas justificativas.

Individual	Justificou a resposta
	Não houve marcação no quesito não

A tabela 4 se refere a resposta “um pouco” e suas respectivas justificativas

Tabela 4 – Resposta “um pouco” dos alunos e suas justificativas.

Individual	Justificou a resposta
I-03	
I-04	Porque não mostra o cálculo como fazer
I-05	Porque nos ajudou muito
I-06	Pois tenho dificuldade na compreensão da disciplina
I-12	
I-13	Sim, pela dica da informática e a facilidade que podemos
I-16	Porque tenho dificuldade em matemática

Na tabela 2 mostram-se doze estudantes que responderam “sim”, passando a visualizar através do software, a matemática sobre uma nova ótica. A tabela 3 mostra

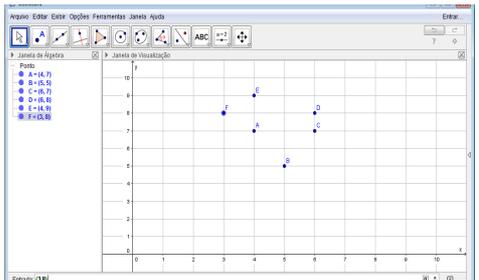
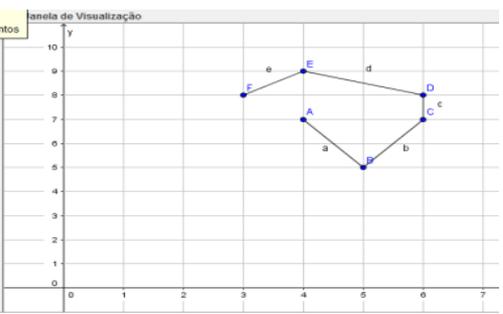
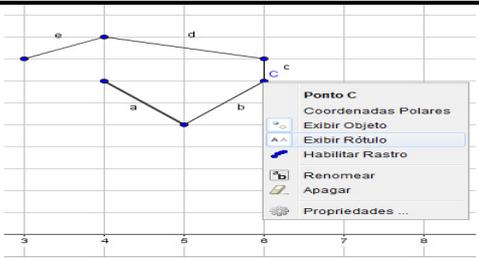


que não houve marcação no quesito “não”. A tabela 4 mostram-se sete estudantes responderam “um pouco” sobre a visualização da matemática sobre outra ótica. Sendo assim, podemos afirmar que o software como metodologia contribui para aquisição do conhecimento.

A Geometria Analítica requer que os discentes desenvolvam habilidades e competências com simples representações de pontos, figuras e relações de equação no plano cartesiano, até a resolução de problemas com equações e inequações, identificação de equação de reta, circunferência e formas cônicas. Esta relação da geometria e álgebra foi desenvolvida por René Descartes por volta do século XVII, Valerio and Souza (2013).

A seguir apresentamos a Tabela 5, uma aplicação com o GeoGebra baseado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Assim selecionamos o seguinte exemplo como referência:

Tabela 5 - Aplicação com o Geogebra baseado na Teoria dos Campos Conceituais

C=(S,I,R)		
Situação (S)	Invariantes (I)	Representação (R)
<p>O diretor do jardim zoológico recebe uma mensagem secreta, anunciando a chegada de um novo animal. Encontre os pontos correspondentes aos pares escritos na mensagem. Mensagem Secreta: (4,7) (5,5) (6,7) (6,8) (4,9) (3,8). Ligue-os na ordem em que estão escritos e obterás a resposta.</p>	<p>-Representar os pontos no sistema cartesiano ortogonal da mensagem secreta.</p> <p>-(Conhecimentos algébricos/geométricos - plano cartesiano).</p>	
	<p>-Construa os segmentos utilizando a ferramenta Segmento definido por dois pontos, seguindo a ordem dos pontos encontrados.</p> <p>-Distância entre dois pontos.</p> <p>-Interligação dos pontos no sistema cartesiano ortogonal, através do segmento de reta.</p> <p>-(Conhecimentos algébricos/geométricos - plano cartesiano, retas).</p>	
	<p>Clicar sobre o segmento com o botão direito do mouse e esconder rótulo.</p> <p>-Identificação dos pontos no sistema cartesiano ortogonal.</p>	

5. Conclusões

Este trabalho teve como objetivo analisar a contribuição do GeoGebra no ensino de conceitos da Geometria Analítica: ponto e reta, tendo como base as atividades



propostas, dando importância aos conhecimentos prévios e/ou adquiridos em sala dos estudantes, tendo como base a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Foi realizada uma reflexão e discussão a respeito da implantação e do uso de softwares dinâmicos gratuitos para ensinar matemática no ensino médio, com o intuito de construir atividades de Geometria Analítica que possam ser resolvidas com o auxílio do software GeoGebra, desenvolvendo uma proposta didática apoiada no uso da tecnologia.

Desta forma, apresentam-se como resultados a contribuição do GeoGebra no desenvolvimento das atividades propostas embasada na prática, possibilitando aos professores aulas mais dinâmicas e, organizadas de maneira a despertar o “gosto” pela matemática. O estudo, também visa o desenvolvimento de novas técnicas, que serão desenvolvidas com os softwares e com a resolução dos problemas de construção geométrica.

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud contribuiu com a formação de conceitos, na qual os estudantes tiveram a oportunidade de aplicar os seus conhecimento implícito ou explícito, juntos aos problemas propostos utilizando o software GeoGebra, aplicado aos conteúdos de Geometria Analítica: ponto e reta.

As respostas aos questionários dos estudantes foram satisfatórias conforme apresentada na análise quantitativa, a maioria dos estudantes conseguiu desenvolver as atividades propostas utilizando o GeoGebra. Com o desenvolvimento da pesquisa percebe-se que o uso de tecnologias está cada vez mais presente no ambiente escolar quer seja de forma direta e indireta como: *celulares, tablet, notebook, netbook* e outros. Nestes ambientes os docentes estão cada vez mais inserindo a utilização desses recursos para incrementar e dinamizar suas aulas, tornando mais dinâmicas, de modo a prender atenção dos estudantes.

Apesar de ter sua origem em uma ideia relativamente simples, o estudo da Geometria Analítica por parte dos estudantes, demonstra ser de “difícil entendimento”, apresentando grandes dificuldades, principalmente no que se refere a visualização dos conceitos envolvidos e da capacidade de localização no plano cartesiano, necessitando complementar o seu ensino com ferramentas que permitam o entendimento das figuras, associando a isso as equações e demonstrações.

Referências

Bogdan, R. and Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto.

Dante, L. R. (2013). “Matemática: contexto & aplicações”. Ática, 2. Ed. volume 3.

Dolce, O. and Pompeo, J.N. (2013). *Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana*. Atual, 9ª edição.

Geogebra, Site Oficial. (2017). Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. [Acesso em: 30 mar. 2017].

Gil, A.C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. Atlas, 6. Ed.

Goodenough, W. (1971). *Culture, language, and society*. Reading: Addison Wesley.



- Hohenwarter, M. (2015). Geogebra 4 Quickstart. Tradução para Português de Portugal por Antônio Ribeiro e Jorge Geraldês. Disponível em: <http://static.geogebra.org/help/geogebraquickstart_pt_PT.pdf>. [Acesso em: 30 mai. 2015].
- Moreira, M.A. (2002). A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências*. V7(1), p. 7-29. Porto Alegre: Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias". Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. [Acesso em: 30 mai. 2015].
- PCN+, Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. (Brasil, 2010). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. [Acesso em: 01 dez. 2017].
- Prodanov, C.C and Freitas, E.C. (2013). Metodologia do Trabalho Científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. – Novo Hamburgo: Feevale.
- Richardson, R.J. (1999). Pesquisa Social: métodos e técnicas. 3. ed. São Paulo: Atlas.
- Valerio, S. (2013). Ensino da Geometria Analítica com o Uso do Software Geogebra. *Revista Eletrônica de Educação e Ciência (REEC)* - ISSN 2237-3462 - Volume 03 - Número 01.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition subtraction problems. In: Carpenter, T. & Moser, J. & Romberg, T. Addition and subtraction. A cognitive perspective. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Vergnaud, G. (1983). Quelques problèmes théoriques de la didactique a propos d'un exemple: les structures additives. *Atelier Internacional d'Été: Recherche em Didactique de la Phyque*. La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In: Hiebert, H. & Behr, M. (Eds.). *Research Agenda In: Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In: Nasser, L. (Ed.). *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática*. Rio de Janeiro, p. 1-26.
- Vergnaud, G. ; Guershon, H. and Confrey, J. (1994). The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of mathematics. *State Universty of New York Press*, p. 41-59.
- Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavioral*, v. S17, n. 2, p. 167-181.